1. **Вероятностные модели и парадокс Бертрана**

**Вероятностная модель** - математическая модель реального явления, содержащего элементы случайности.

**Стохастическая** – ситуация, удовлетворяющая свойствам 1-3

Св-ва:

1. Наличие случайности (неопределенности)
2. Воспроизводимость (с учетом случайности)
3. Устойчивость частот  A – событие

**Вероятностное пространство** — это тройка , где

* — это произвольное [множество](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9C%D0%BD%D0%BE%D0%B6%D0%B5%D1%81%D1%82%D0%B2%D0%BE), элементы которого называются [элементарными событиями](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%AD%D0%BB%D0%B5%D0%BC%D0%B5%D0%BD%D1%82%D0%B0%D1%80%D0%BD%D0%BE%D0%B5_%D1%81%D0%BE%D0%B1%D1%8B%D1%82%D0%B8%D0%B5), исходами или точками;
* F — [сигма-алгебра](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A1%D0%B8%D0%B3%D0%BC%D0%B0-%D0%B0%D0%BB%D0%B3%D0%B5%D0%B1%D1%80%D0%B0) подмножеств , называемых (случайными) [событиями](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A1%D0%BB%D1%83%D1%87%D0%B0%D0%B9%D0%BD%D0%BE%D0%B5_%D1%81%D0%BE%D0%B1%D1%8B%D1%82%D0%B8%D0%B5);
* — вероятностная мера или вероятность.
* — **вероятностная мера** или вероятность, если выполняются три условия:
1. 
2. 
3. Сигма – аддитивность:


Семейство F [подмножеств](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D0%BE%D0%B4%D0%BC%D0%BD%D0%BE%D0%B6%D0%B5%D1%81%D1%82%D0%B2%D0%BE) [множества](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9C%D0%BD%D0%BE%D0%B6%D0%B5%D1%81%D1%82%D0%B2%D0%BE) *Ω* называется **σ-алгеброй**, если оно удовлетворяет следующим свойствам:

1. F содержит *Ω*.
2. Если  то и его [дополнение](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%94%D0%BE%D0%BF%D0%BE%D0%BB%D0%BD%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D0%B5_%28%D1%82%D0%B5%D0%BE%D1%80%D0%B8%D1%8F_%D0%BC%D0%BD%D0%BE%D0%B6%D0%B5%D1%81%D1%82%D0%B2%29) .
3. [Объединение](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9E%D0%B1%D1%8A%D0%B5%D0%B4%D0%B8%D0%BD%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D0%B5_%D0%BC%D0%BD%D0%BE%D0%B6%D0%B5%D1%81%D1%82%D0%B2) [счётного](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A1%D1%87%D1%91%D1%82%D0%BD%D0%BE%D0%B5_%D0%BC%D0%BD%D0%BE%D0%B6%D0%B5%D1%81%D1%82%D0%B2%D0%BE) подсемейства из F также в F.

Борелевская σ-алгебра  - σ-алгебра, порожденная всеми [a, b).

**Случайная величина X(w) , w**  *Ω* – числовая функция, определенная на :



P(X B) – распределение сл. вел. X.

 - функция распределения сл. вел. X.

Св-ва функции распределения:

* 1. 
	2. F(x) не убывает
	3. , 
	4. F(x) непрерывна слева.

Парадокс Бертрана:

какова вероятность того, что длина наугад выбранной хорды больше длины вписанной окружности?



1. **Математическая модель центра случайной величины.**

Математическое ожидание случайной величины:



**Опр.**  ,  - q-квантиль распределения, если 

Если F непрерывна, то 

**Медиана** – квантиль с q = ½

**Мода** – это:

В абс. непрер. случае: 

В дискретном: 

1. **Математическая модель разброса случайной величины.**





 - среднеквадратичное отклонение.

 - «инженерная метрика»

Интерквартильный размах , где Xq – q-квантиль

1. **Случайные величины. Зависимость событий и случайных величин.**

**Опр.** События A и B  **F** независимы, если P(AB) = P(A)P(B)

**Опр.**  независимы в совокупности, если 



**Опр.**  **-** сл. вел. независимы, если 



**ковариация**:



св-ва ковариации:

линейна отн. аргумента, симметрична, не зависит от сдвига аргумента, =0 если независимы**.**

**корреляция:**





**5. Виды сходимости случайных величин**

 Везде X1, X2, X3 … сходятся к X

1. Сходимость почти всюду (почти наверное):
2. Сходимость по вероятности:
3. Сходимость в среднем порядка r: сходится, если
4. Сходимость по распределению: в точках непрерывности F
5. Слабая сходимость: - непрерывная, ограниченная:

**Взаимосвязь между сходимостями**

**1**

**4**

Из первого следует второе (обратное неверно)

Из третьего следует второе (обратное неверно)

**2**

Из второго следует четвертое (обратное неверно)

**3**

**5**

Четвертое и пятое эквивалентны

Остальные взаимосвязи не оговорены

**Центральная предельная теорема**

Пусть X1, X2, X3… - норсв

Существует мат. ожидание EXi = а – конечно, дисперсия DXi =

Тогда равномерно по х

Справа стоит стандартное нормальное распределение

**Оценка скорости сходимости в ЦПТ**

Неравенство Берри-Эссеена:

,

где С0 – константа (0.4 < С0 < 0.7056), M3 = E|Xi - a|^3

**6. Закон больших чисел**

Пусть X1, X2, X3… - норсв

Существует мат. ожидание Xi = а

Тогда

**Оценка скорости сходимости ЗБЧ**

цель: r(n): Yn/r(n) имеет конечный предел, не равный нулю

из ЦПТ: r(n) = n^(-1/2)

**7. Распределение Пуассона**

X – случайная величина, имеет распределение Пуассона с параметром лямбда, если она принимает целочисленные неотрицаельные значения и , лямбда > 0

Дисперсия, мат.ожидание = лямбда

Информационная энтропия

Фактически, Пуассоновское распределение – предельное для биномиального

**Теорема Пуассона**

Xi из следующего распределения: 1 с некоторой вероятносью p и 0 с вероятностью (1-p)

Пусть в системе серий n стремится к бесконечности, стремится к нулю, n стремится к лямбда

Тогда , Sn = X1 + X2 + … + Xn

**Обобщение теоремы Пуассона**

Пусть выполнено

Тогда , Sn = X1 + X2 + … + Xn

**8. Устойчивые распределения**

Функция распределения G(x) называется устойчивой, если для ее характеристической функции g(t) выполнено

или

G(a1\*x+b1)\*G(a2\*x+b2) = G(a\*x+b) (для любых a1,a2>0, b1,b2 из R, существуют a>0 и b из R)

**Теорема Леви**

Пусть X1, X2 … - норсв

Тогда F(x) может быть предельной для сумм вида (X1+X2+…+Xn - an)/bn при некоторых an и bn > 0 тогда и только тогда, когда F(x) – устойчива

// an и bn – имеются в виду индексы n у a и b

**Безгранично делимая характеристическая функция**

f(t) – характеристическая функция – безгранично делима, если для любого n существует fn(t) – характеристические функции, такие что f(t) = (fn(t))^n

при этом если X из распределения с хар. функцией f(t), то X представима как сумма Xi (которые из распределения такого, что ему соответствует fn(t))

**Теорема Хинчина**

Пусть выполнено

Тогда F(x) может быть предельной для сумм вида Xn,1 + Xn,2 + … + Xn,mn при n стремящемся к бесконечности тогда и только тогда, когда F(x) соответствует безгранично делимая характеристическая функция.

**9. Информация и энтропия. Их свойства.**

Определение 1

Пусть A – событие, P(A) > 0. Тогда **информацией** (по Шеннону), содержащейся в А, называется величина

Определение 2

 Пусть A,B – события, P(A) > 0, P(B) > 0. Тогда **информацией** (по Шеннону),

содержащейся в B относительно А, называется величина

Свойства информации:

1) Чем меньше P(A), тем больше I(A).

2) Если А, В – независимые с.в., I(A|B) = 0.

3) Если А, В – независимые с.в., I(A|B) = I(A)+ I(В).

Определение 3

Пусть E – эксперимент с исходами и соответствующими им вероятностями

Пусть Q(E) – количество информации, полученной в ходе эксперимента - случайная величина со значениями I(), принимаемыми с вероятностями p.

Тогда **энтропией** E называется величина

Свойства энтропии:

1. Энтропия неотрицательна, энтропия равна 0 т.и.т.т., когда один из исходов эксперимента имеет вероятность 1.
2. Максимальной энтропией среди экспериментов с n исходами обладает такой,

в котором исходы равновероятны.

3) E – эксперимент с исходами

E получается из Е объединением двух исходов с номерами i и j.

E - эксперимент с двумя исходами которым соответствуют вероятности

.

Тогда H(E) = H(E) + (p+p)\*H(E).

4)Н(Е) не зависит от A, а зависит только от p.

5)H(E) – непрерывная функция p.

**Теорема Фадеева**

Если функционал H(p1,..pn) удовл. 1)-5) =>

**10. Дифферинциальная энтропия. Свойства некоторых распределений.**

Пусть теперь - случайная величина.

1) С.в. дискретна, имеет конечное число значений с соответствующими вероятностями.

Тогда энтропия равна

2) С.в. дискретна, имеет бесконечное число значений.

Тогда выражение для энтропии аналогично, но ряд бесконечен.

3) С.в. абсолютно непрерывна.

Тогда энтропия равна

Где p – плотность распределения с.в. Определенная таким образом энтропия называется

дифференциальной энтропией.

Теорема

1) Пусть имеет равномерное распределение ~R[-a;a]

Тогда H() >= H() для любой с.в. , распределенной на [-a ;a] : P(||<=a) = 1

2) Пусть имеет показательное распределение ~P()

Тогда H() >= H() для любой с.в. : P(>=0) = 1, M = 1/, >0

3) Пусть имеет нормальное распределение ~N(a, )

Тогда H() >= H() для любой с.в. : M = a, D = .

**11. Определение пуассоновского процесса.**

Определение 1

Семейство случайных величин X(t, ), определенное на одном базовом пространстве () ,tTR называется **случайным процессом**.

Определение 2

При фиксированном X(t, ) – **траектория** случайного процесса.

X(t) -> S – множество всех траекторий случайного процесса. На S можно определить борелевскую сигма - алгебру , порожденную множеством всех открытых подмножеств S. Прообраз любого B - событие (X(t): -> S).

Определение 3

 **Распределением** случайного процесса называется мера P, заданная следующим образом:

Определение 4

 Процесс X(t) – процесс **с независимым приращением**, если

X (t), X (t)- X (t),…, X (t)- X (t) – независимы в совокупности.

Определение 5

 Процесс X(t) – **однородный**, если распределение X(t+h) - X(t) совпадает с распределением X(s+h) - X(s) для t, s, h: t, t+h, s, s+h T.

Определение 6

 Процесс X(t) – **пуассоновский**, если

1. X(t) имеет независимое приращение
2. X(t) однородный
3. X(0) = 0 почти наверное
4. При h>0, h->0

P(X(h) = 0) = 1- h +o(h)

P(X(h) = 1) = h +o(h)

P(X(h) >= 2) = o(h)

>0

Для пуассоновского процесса

X(t) ~ П(t)

MX(t) = DX(t) = t

**12. Информационные свойства Пуассоновского процесса**

Пусть τ[1] … τ[n] – моменты скачков Пуассоновского процесса

Распределение длин скачков τ[j] – τ[j-1] обладает свойством отсутствия памяти => оно показательно

Зафиксируем [a; b] на временной оси. Пусть в [a; b] попало n скачков Пуассоновского процесса. Каково их распределение?

**Теор**. Условное распределение τ[1] … τ[n] при условии, что X(b) – X(a) = n, совпадает с распределение вариационного ряда, построенного по выборке из равномерного распределения на [a; b].

Плотность вариационного ряда, построенного по выборке из равномерного распределения на [a,b] есть

**Теор**. => Ф(х), где Ф(х) – функция распределения стандартного N(0,1), причём сходимость равномерна по х, при , т.е.

, С0 – константа Берри- Эссеена

13. Случайные суммы, основные свойства, пуассоновские случайные суммы

x1, x2, …– н.о.р.с.в.

N – целая неотрицательная случайная величина.

xi, N – определены на одном ВП.

**Случайная сумма** Sn = x1 + x2 + … + xN

**Свойства**:

1) pn = **P**(N=n); F\*n(x)= n-кратная свертка F (ф.р. xi); F\*0 – ф.р. с единичным скачком в нуле.

1. если p0 > 0 => FSN  **не** является абсолютно непрерывной
2. P0=0 => существует , f\*n(x)= n-кратная свертка f (плотн. xi);
3. ; (s) – производящая функция N; f(t) – характ. функция xi
4. **E**SN = **E**N \* **E**x1; **D**SN = **D**N \* (**E**x1)2 + **E**N \* **D**x1

N ~ П() => SN есть **пуассоновская случайная сумма**

**Теорема**

 **1)** - характеристическая функция SN; => SN безгранично делима.

**2) E**SN = Ex1; **D**SN =  (Ex12), **E**N = **D**N = 

14. Геометрические случайные суммы, теорема Реньи, связь между геометрическими и пуассоновскими случайными суммами

N, x1,x2,.. – н.с.в., x1,x2,.. – н.о.р.с.в.

N ~ Geom (p) =>– Геометрическая Случайная Сумма

; ; N(s) = ; n=0,1,..

# Теорема Реньи

Пусть N ~ Geom(p);

 стандартный показательный закон.

 равномерно по x

Если , то

**Теорема (связь)**

Всякая геом. случайная сумма является пуассоновской случайной суммой, причем если

 где M ~ Geom(p), то

 N ~ П();

 имеет х.ф. равную

, где имеют характеристич. функцию f(t), L имеет распределение логарифмического ряда, то есть

## Следствие

Пусть SN – пуасс. случайная сумма, N ~ П();

xi~f(t); Пусть является характеристической функцией

=> SN – геометрическая случайная сумма, причем ; ; ~g(t) – хар.функция

15. Теорема переноса. Аналог теоремы Пуассона для случайных сумм.

Схема серий (последовательность последовательностей) {Xn,j} при фиксированном n Xn,j – последовательность н.о.р.с.в.

# Теорема переноса

{Xn,j} Схема серий.

Nn – положит. целочисленная случайная величина, не зависящая от Xn,i

mk – неограниченно возрастающая последовательность натуральных чисел

Если

 - по распределению и

, то , где

 – х.ф., соотв. , h(t) – хар. функция, соответствующая H(x)

Теорема Пуассона для случайных сумм

-семейство последовательностей случайных величин.

 Np – положительн. целочисл. случ. величина

Тогда - обобщ. пуасс. случ. величина (смешанн. Пуассон.)

16.Смеси вероятностных распределений, идентифицируемость, примеры

Пусть Q(y) – вероятностная мера на (Y,), то есть (Y, , Q) – вероятностное пространство. Тогда - смесь распределения F(x,y) по y относительно Q(y). При Y(y)=y H(x)=**E**F(x, y). Если существует плотность f(x,y), то - плотность H(x)

Пример.

Q- дискретная, принимающая значения (y1, …) с вероятностями (p1,…)

, -компоненты смеси, - веса компонент

.

Определение

- параметр масштаба

- сдвиг масштабная смесь.

, x и (u,v) – стохастически независимы.

Определение

пусть F(x,y) при всяком y – ф.р. при всяком х измерима по y

Q-семейство случайных величин

- семейство смесей

Семейство W называется **идентифицируемым**, если из ,

где , Q следует

**18. Обобщенный процесс Кокса. ЦПТ и ЗБЧ для обобщенных процессов Кокса.**

 - н.о.р.с.в.

E = a, D =

 - стандартный Пуассоновский процесс

процесс с неубывающими непрерывными справа траекториями

 п.в.,

Определение1: дважды стохастический Пуассоновский процесс <=> **Процесс Кокса,** управляющий процесс

Определение2: – **обобщенный процесс Кокса**

Далее будем предполагать, что E = 0, D =

Теорема1: Пусть , , d(t) – неограниченно возрастающая положительная функция. Для того, чтобы (- одномерное распределение нормированного процесса Кокса) необходимо и достаточно - случайной величины такой, что: 1)P(z<x) = (масштабная смесь нормальных законов)

2) (это означает, что при некоторой нормировке у есть предел, может быть случайный.

– функция распределения строго устойчивого закона

 – соотв. характеристическая функция, где -показатель распределения, - параметр, 0<<=2, || <= min(1, )

t = 1,2,.. – дискретное время

 - н.о.р.с.в, >= 0 (неубывающие траектории) и - однородный процесс с независимыми приращениями ( - приращение процесса)

Пусть , E = 0, D =

Теорема3: (**Вроде как ЦПТ для обобщенных процессов Кокса**)

 при некотором выборе нормировочных значений т.и т.т., когда

Lim при

Смысл: Тяжелые хвосты процессов Кокса обусловлены «плохим» поведением управляющего процесса. При этом распределения слагаемых могут иметь сколь угодно легкие хвосты

Теорема4: (**ЗБЧ для обобщенных процессов Кокса с ненулевым средним**)

Пусть , ,

т.и т.т., когда - случайная величина, такая что

Z= a\*u (так определяется); Смысл: предел не случаен  u не случайно

**19. Островершинность масштабных смесей нормальных законов**

∫(0 до ∞) Φ(x/y)d(P(Y<y)) Y > 0

(мат.ож) Φ(x/y) – плотность (мат.ож)[(1/y)\*φ(x/y)] = ∫(0 до ∞) (1/y)\*φ(x/y)dP(Y<y)

Y – дискретна ∑(k)P(Y=yk) Φ(x/ yk) плостности

∑(k)(P(Y= yk)/ yk)\* φ(x/ yk)

Пусть E(z)n < ∞

æ(z) – коэфф. эксцесса (показывает островершинность рапр.)



Если Z ~ Φ(x) => æ(Z) = 3

Пусть f(t) = exp{-t2/2} – хар. ф. норм. станд. распр. => Надо взять 4 произв. и посчитать ее в 0 => æ

**Лемма**

Пусть (мат.ож.)Х = 0, P(Y>0) = 1, (мат.ож)Х4 < ∞; (мат.ож)Y4 < ∞, X,Y – незав.

Тогда æ(XY) >= æ(X), æ(XY) = æ(X)  P(Y=const) = 1

**Утв.**

Пусть Х ~ N(0,1), P(u>0) = 1, Z = X√u

Тогда для люб. æ >= 0 P(Z>X) >= 1 - Φ((√2π)XpZ(0)).

**Про метрику Леви**

Метрика Леви L(F, G) = L(G, F) = inf( h: G(x-h)-h <= F(x) <= G(x+h) +h
 для любого x из R
Геометрический смысл: максимальная длина стороны квадрата (со
сторонами, параллельными осям), который можно вписать между графиками
F и G